

## Álgebra III

### Práctica 7 - Segundo cuatrimestre de 2016

#### Reducción módulo $p$ y teorema de Dedekind

**Nota:** En esta práctica trabajamos con polinomios con coeficientes enteros. Dado un polinomio separable  $f \in \mathbb{Z}[X]$  de grado  $n$ , denotamos  $G_f$  al grupo de Galois de  $f$  sobre  $\mathbb{Q}$ , el cual identificamos con un subgrupo de  $\mathbb{S}_n$ . Para cada primo  $p$ , la reducción de  $f$  módulo  $p$  es la imagen de  $f$  por el morfismo canónico  $\mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{F}_p[X]$ , y la denotamos  $f_p$ .

**Ejercicio 1.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio mónico de grado  $n$ , y sea  $c$  un número entero divisible por todos los denominadores en los coeficientes de  $f$ . Probar que el polinomio  $g(x) = c^n f\left(\frac{x}{c}\right)$  es mónico, tiene coeficientes enteros, y  $\text{Desc}(g|\mathbb{Q}) = \text{Desc}(f|\mathbb{Q})$ .

**Ejercicio 2.** Para cada uno de los siguientes polinomios  $f$ , probar que  $G_f = \mathbb{S}_n$ , con  $n = \deg(f)$ :

- (a)  $X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 5X^2 - 2X + 3$ ;
- (b)  $X^6 - 12X^4 + 15X^3 - 6X^2 + 15X + 12$ ;
- (c)  $X^5 + 25X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 10X + 15$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f$  el polinomio  $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2$ . Factorizando  $f$  módulo 3 y módulo 7, probar que  $G_f$  contiene una trasposición y un 4-ciclo. Es  $G_f = \mathbb{S}_5$ ?

**Ejercicio 4.** Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  mónico e irreducible de grado 4 tal que  $G_f \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Probar que para todo primo  $p$ , el polinomio  $f_p$  es reducible en  $\mathbb{F}_p[X]$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $p > 2$  un número primo y sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  un polinomio mónico e irreducible de grado  $p+2$ . Supongamos que para un cierto primo  $p'$ , el polinomio  $f_{p'}$  se factoriza en  $\mathbb{F}_{p'}[X]$  como producto de dos polinomios irreducibles cuyos grados son 2 y  $p$ . Probar que  $G_f = \mathbb{S}_{p+2}$ .

**Ejercicio 6.** Decidir si el polinomio  $X^7 + 12X^5 - 2X^2 - 2$  es resoluble por radicales.  
*Sugerencia: mirar módulo 11.*